# 1 La prezzatura dei prodotti derivati[1]

I modelli di prezzatura più diffusi nei mercati finanziari si basano sull'assunzione fondamentale che il mercato sia *frictioneless* ovvero:

1. gli investitori sono *price takers;*
2. tutti hanno accesso allo stesso *set* di informazioni;
3. non ci sono costi di transazione o commissioni;
4. gli *asset* sono perfettamente divisibili e liquidi;
5. non c'è limite sulle aperture di credito della banca;
6. i tassi di prestito e raccolta sono eguali.

## 1.1 La prezzatura dei derivati: il ruolo delle preferenze

La problematica fondamentale inerente ogni modello di prezzatura consiste nella definizione del *pay-off* a scadenza del *contingent claim* oggetto d'analisi.

Si spiega, quindi, come prezzare un tipico *path indipendent contingent claim* di tipo europeo: la *call,* il cui *pay-off* a scadenza è definito come:

$g(S_T) = (S_T - K)^+ \triangleq \max\{S_T - K, 0\}$

ovvero:

$$g(S_T) = \left\{ \begin{array}{lll} S_T - K & if \quad S_T > K & \text{l'opzione è esercitata} \\ 0 & if \quad S_T \leq K & \text{l'opzione è abbandonata} \end{array} \right\}^{2}$$

Si ipotizza di voler prezzare il suddetto derivato in un mercato *spot* uniperiodale al tempo $t = 0$. Il problema consiste sostanzialmente nello stimare il valore della variabile aleatoria $S$ al tempo $T = 1$ ($S_T$). Si ipotizza che tale valore finale sia una variabile casuale sullo spazio probabilistico $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ con una misura di probabilità $P$ che ha la caratteristica di:

$P(\omega_1) + P(\omega_2) = 1.$

In termini formali, $S_T$ é una funzione $S_T : \Omega \longrightarrow R_+$ data dalla seguente formula:

$$S_T(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} S^u & if \quad \omega = \omega_1 \\ S^d & if \quad \omega = \omega_2 \end{array} \right\}$$

e, quindi, il *pay-off* per la *call* al tempo $T = 1$: $X = C_T = (S_T - K)^+$ diventa:

$$C_T(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} C^u = (S^u - K)^+ & se \quad \omega = \omega_1 \\ C^d = \left(S^d - K\right)^+ & se \quad \omega = \omega_2 \end{array} \right\}$$

Il prezzo dell'opzione é intuitivamente dato dal valore atteso sotto la misura $P$ del *pay-off* scontato della *call.* Questo é uguale a:

$$C_0 = E_P((1+r)^{-1}C_T) = (1+r)^{-1} \cdot \left[P(\omega_1)\left(S^u - K\right)^+ + P(\omega_2)\left(S^d - K\right)^+\right] \qquad [1]$$

[1] I modelli esposti non sono illustrati in base alle date di pubblicazione dei relativi *papers,* bensí in base alla necessità di esporre in modo organico e coerente le metodologie di prezzatura degli strumenti derivati.

[2] nel caso della *put:*
$g(S_T) = (K - S_T)^+ \triangleq \max\{K - S_T, 0\}$
ovvero:
$$g(S_T) = \left\{ \begin{array}{lll} K - S_T & if \quad S_T < K & \text{l'opzione è esercitata} \\ 0 & if \quad S_T \geq K & \text{l'opzione è abbandonata} \end{array} \right\}$$

É evidente che il valore dipenda dalla misura di probabilità $P$ che potrebbe essere una misura di tipo soggettivo e, quindi, dipendere dalle ipotesi degli investitori sull'evoluzione del mercato. Ciò che si intende dimostrare è che esiste una sola misura di probabilità in grado di soddisfare l'uguaglianza [1] e che tale misura presenta delle esplicite caratteristiche.

## 1.2 Il metodo del portafoglio di replica (modello di Sharpe-Rendleman-Bartter)

Intuitivamente il prezzo di un *contingent claim* cosí come definiti nel paragrafo precedente è uguale al valore di un portafoglio che replichi esattamente il suo *pay-off* a scadenza. L'idea consiste quindi nel costruire un portafoglio $\phi$ al tempo $t = 0$ che replichi esattamente il *pay-off* dell'opzione al tempo $T$ - ipotizzato ancora *uniperiodale* per semplicità.

Si definisce:

$\phi = \phi_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in R^2$

il portafoglio di un investitore con una posizione corta in una opzione *europea.* In particolare sia $\alpha_0$ il numero di azioni tenute al tempo $t = 0$ e $\beta_0$ l'ammontare di denaro depositato/preso a prestito in banca al tasso $r$.

Sia $V_t(\phi)$ il valore (*pay-off)* di questo portafoglio al tempo $t = 0$ e $t = T$.

Da qui che il processo del valore $V(\phi)$ è:

i. $V_0(\phi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0$

ii. $V_T(\phi) = \alpha_0 S_T + \beta_0(1 + r)$

Per quanto precede, il portafoglio replica esattamente l'opzione quando:

$V_T(\phi) = C_T$

ovvero:

$$V_T(\phi)(\omega) = \left\{ \begin{array}{lll} V^u(\phi) = \alpha_0 S^u + (1+r)\beta_0 = C^u & se & \omega = \omega_1 \\ V^d(\phi) = \alpha_0 S^d + (1+r)\beta_0 = C^d & se & \omega = \omega_2 \end{array} \right\} \qquad [2]$$

La risoluzione di questo sistema fornisce i valori di $\alpha_0$, $\beta_0$ che consentono di determinare il portafoglio di replica dell'opzione al tempo $t = T$. Inoltre in base all'espressione *sub i.* si possono utilizzare tali valori per determinare $V_0(\phi)$ e, quindi, si individua il prezzo della *call* $C_0$ dato che $V_0(\phi) = C_0$.

I valori di $\alpha_0$, $\beta_0$ che risolvono il sistema sono:

$\alpha_0 = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} \qquad [2a]$

$\beta_0 = \frac{C^d S^u - C^u S^d}{(S^u - S^d)(1+r)} \qquad [2b]$

Da qui che:

$C_0 = V_0(\phi) = \alpha_0 S_0 + \beta_0 = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} S_0 + \frac{C^d S^u - C^u S^d}{(S^u - S^d)(1+r)} \qquad [3]$

Tale valore, date le ipotesi di costruzione, è anche definito *manifacturing cost.*

É importante evidenziare che per una *call* il valore di $\alpha$ sia sempre $> 0$ e $\beta$ sia sempre $< 0$. In altri termini[3]:

i. $\alpha \in R_+$

[3] Per una *put* si ha sempre:
i. $\alpha \in R_-$
ii. $\beta \in R_+$

ii. $\beta \in R_-$

Per quanto precede tale modello necessita delle seguenti informazioni per individuare il prezzo di un'opzione *europea*:

1. il prezzo della *call* al tempo $t = T$;
2. i valori dell'azione al tempo $t = 0, T$;
3. il tasso di interesse $r$.

I flussi di cassa previsti dal modello sono cosí definiti:

al tempo $t = 0$

$$\left\{\begin{array}{cc} \text{vendita dell'opzione} & C_0 \\ \alpha_0 \text{ azioni acquistate} & -\alpha_0 S_0 \\ \text{contante depositato/preso a prestito} & -\beta_0 \end{array}\right\} \ni' V_0(\phi) - C_0 = 0$$

al tempo $t = T$

$$\left\{\begin{array}{cc} \textit{pay-off} \text{ rinveniente dall'opzione} & -C_T \\ \alpha_0 \text{ azioni vendute} & +\alpha_0 S_T \\ \text{contante prelevato/restituito} & +(1+r)\beta_0 \end{array}\right\} \ni' V_T(\phi) - C_T = 0$$

È importante notare che non si richiede alcuna indicazione circa le preferenze degli investitori; infatti gli autori definiscono il loro prezzo un *rational price*.

È, inoltre, importante notare che qualora $V_0(\phi) \neq C_0$ si presenta la possibilità di arbitraggio[4].

Ad esempio, si ipotizzi che il prezzo effettivo riscontrato sul mercato per un'opzione *call* al tempo $t = 0$ fosse $\widetilde{C}_0$ e che al tempo $t = T$ il valore della *call* sia $C_T$. Si supponga che il valore del portafoglio di replica al tempo $t = T$ sia $V_T(\phi) = C_T$ e che in base ai valori di $\alpha_0, \beta_0$ calcolati cosí come evidenziato nella [2] si ottiene il suo valore al tempo $t = 0 : V_0(\phi)$.

Sia $\widetilde{C}_0 > V_0(\phi)$; in tal caso l'investitore avrà convenienza a replicare la *call* con un portafoglio $V_0(\phi)$, tale che $V_T(\phi) = C_T$, ed a vendere la stessa per $\widetilde{C}_0$ lucrando cosí la differenza $\widetilde{C}_0 - V_0(\phi)$, dato che a scadenza $V_T(\phi) = C_T$, che garantisce un'opportunità di arbitraggio *forte*.

La strategia al tempo $t = 0$ diventa, quindi,

$$\left\{\begin{array}{cc} \text{vendita della call} & \widetilde{C}_0 \\ \alpha_0 \text{ azioni acquistate} & -\alpha_0 S_0 \\ \text{contante preso a prestito} & -\beta_0 \end{array}\right\} \ni' V_0(\phi) - \widetilde{C}_0 < 0$$

e, quindi, al tempo $t = T$ :

$$\left\{\begin{array}{cc} \textit{pay-off} \text{ rinveniente dall'opzione} & -C_T \\ \alpha_0 \text{ azioni vendute} & \alpha_0 S_T \\ \text{contante restituito} & (1+r)\beta_0 \end{array}\right\} \ni' V_T(\phi) - C_T = 0$$

Per tale motivo $V_0(\phi) = C_0$ é anche definito *no-arbitrage price*.

---

[4] Si definisce arbitraggio la circostanza offerta sul mercato finanziario di combinare dei prodotti offerti sul medesimo in maniera tale da generare un profitto privo di rischio. In termini formali si definiscono due possibili forme di arbitraggio, una *forte* e l'altra *debole*:

La prima, *debole*, quando esiste un portafoglio $\phi$ tale che:

1. $V_0(\phi) - X = 0$
2. $V_T(\phi) - X_T \geq 0$
3. $P(V_T(\phi) > 0) > 0$

La seconda, *forte*, se esiste un portafoglio $\phi$ tale che::

1.$V_0(\phi) - X < 0$ e

2.$V_T(\phi) - X_T \geq 0$

Il prezzo cosí identificato presenta, quindi, due caratteristiche:

1. non é affetto dalle preferenze degli investitori;

2. é *arbitrage - free*

Da qui che tale prezzo viene definito il **prezzo di arbitraggio in un'economia neutrale al rischio.**

É evidente che tale modello sia facilmente implementabile in presenza di *contingent claim* particolarmente semplici. In presenza di derivati più complessi la logica di prezzare per il tramite della replicazione è particolarmente difficile. Si deve quindi produrre una metodologia che offra lo stesso risultato, ovvero fornisca un prezzo che presenti le stesse caratteristiche, ma che risulti più semplice da calcolare.

## 1.3 Il metodo della Martingala

I modelli probabilistici per la prezzatura dei *contingent claim* si basano sulla nozione di *Martingala*, che rappresenta intuitivamente le probabilità di un gioco equo. L'applicazione del metodo della Martingala per la prezzatura dei derivati, richiede l'individuazione di una misura di probabilità $P^*$ equivalente a $P$ e rispetto a quest'ultima tale da descrivere il processo stocastico che individua l'andamento scontato del prezzo del sottostante $S^*$; quest ultimo risulta definito come segue:

i. $S_0^* = S_0$

ii. $S_T^* = (1+r)^{-1} S_T$

Si dice che $S^*$segue una misura di Martingala $P^*$ o piú semplicemente $S^*$ é una $P^*$- Martingala, quando viene rispettata l'uguaglianza:

$S_0^* = E_{P^*}(S_T^*)$ [4]

Si esplicita di seguito la [4] allo scopo di individuare tale misura:

$S_0^* = E_{P^*}(S_T^*) = (1+r)^{-1} \cdot \left[P^*(\omega_1)S^u + P^*(\omega_2)S^d\right]$ [5]

dato che:

$P^*(\omega_1) + P^*(\omega_2) = 1$

$P^*(\omega_2) = 1 - P^*(\omega_1)$

la [5] si può scrivere come:

$S_0^* = (1+r)^{-1} \cdot \left[P^*(\omega_1)S^u + (1 - P^*(\omega_1))\, S^d\right]$ [6]

Risolvendo l'equazione [6] si individua l'**unica** soluzione che determina il valore di $P^*(\omega_1)$ e di $P^*(\omega_2)$:

i. $P^*(\omega_1) = \frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d}$

ii. $P^*(\omega_2) = \frac{S^u - (1+r)S_0}{S^u - S^d}$

Come detto nel paragrafo [1.1] il prezzo dell'opzione é intuitivamente dato dal valore atteso sotto una certa misura di probabilitá:

$C_0 = E_P((1+r)^{-1}C_T) = (1+r)^{-1} \cdot \left[P(\omega_1)\left(S^u - K\right)^+ + P(\omega_2)\left(S^d - K\right)^+\right]$ [7]

Inoltre nel paragrafo precedente si è individuato il prezzo corretto di un qualsiasi *contingent claim* con il metodo della replicazione di portafoglio.

Si dimostra di seguito prima in termini intuitivi e quindi in maniera esplicita che la misura di probabilità che soddisfa la [7] è $P^*$.

semplificando la [7] si ottiene:

$= (1+r)^{-1} \cdot \left[P(\omega_1)S^u + P(\omega_2)S^d - K\right]^+ =$

$= \left[-(1+r)^{-1} \cdot K + (1+r)^{-1} \cdot \left[P(\omega_1)S^u + P(\omega_2)S^d\right]\right]^+$

Definendo -$(1+r)^{-1} \cdot K = \Upsilon$ generica costante, la [7] si può scrivere come:

$C_0 = (1+r)^{-1} \cdot \left[\left[P(\omega_1)S^u + P(\omega_2)S^d\right] + \Upsilon\right]^+$

Da qui che la componente probabilistica del prezzo dell'opzione è uguale a quella del prezzo del sottostante; inoltre è lapalissiano che al tempo $t = 0$, il prezzo dell'opzione scontato $C_0^* = C_0$.

Se $C_0^* = C_0$ e se la componente probabilistica é la medesima é evidente che se $P^*$ è la misura martingala di probabilità che consente di verificare l'uguaglianza:

$S_0^* = E_{P^*}(S_T^*)$

allora l'unica misura di probabilità che consente di risolvere l'uguaglianza [7] è intuitivamente $P^*$:

$C_0^* = (1+r)^{-1} \cdot \left[\left[P^*(\omega_1)S^u + P^*(\omega_2)S^d\right] + \Upsilon\right]^+$

Da qui che:

$C_0^* = C_0 = E_{P^*}((1+r)^{-1}C_T) = E_{P^*}(C_T^*) \qquad [8]$

ovvero che $P^*$ é anche misura martingala di probabilitá per l'opzione.

Per una dimostrazione esplicita si confronta il risultato della [8] con quello della [2]

Esplicitando la [8] si ottiene:

$C_0^* = (1+r)^{-1} \cdot \left[P^*(\omega_1)C^u + (1 - P^*(\omega_1))\, C^d\right]$

sostituendo le misure di probabilità:

$= (1+r)^{-1} \cdot \left[\frac{(1+r)S_0 - S^d}{S^u - S^d} C^u + \frac{S^u - (1+r)S_0}{S^u - S^d} C^d\right]$

semplificando:

$= \left[\frac{C^u S_0 - C^u S^d (1+r)^{-1}}{S^u - S^d} + \frac{C^d S^u (1+r)^{-1} - C^d S_0}{S^u - S^d}\right] =$

$= \left[\frac{C^u S_0 - C^u S^d (1+r)^{-1} + C^d S^u (1+r)^{-1} - C^d S_0}{S^u - S^d}\right] =$

$= \left[\frac{C^u S_0 - C^d S_0 - C^u S^d (1+r)^{-1} + C^d S^u (1+r)^{-1}}{S^u - S^d}\right] =$

$= \left[\frac{\left(C^u - C^d\right) S_0 - C^u S^d (1+r)^{-1} + C^d S^u (1+r)^{-1}}{S^u - S^d}\right] =$

$C_0^* = \frac{\left(C^u - C^d\right) S_0}{S^u - S^d} + \frac{C^d S^u + C^u S^d}{(S^u - S^d)(1+r)}$

che risulta esattamente uguale a [2]

Il metodo della martingala fornisce, quindi, un'efficace metodologia per calcolare il **prezzo di arbitraggio in un'economia neutrale al rischio** di un qualsiasi *contingent claim* come definito nel par [1.1].

Si generalizzano ora tali risultati superando il limite dell'orizzonte uniperiodale e si dimostra che la suddetta coincidenza tra il metodo della replicazione del portafoglio e quello della martingala é comunque valido.

## 1.4 Il modello binomiale (Cox-Ross-Rubinstein)

Si considerano il seguente *set* di date: $0, 1, .....T^*$ e due primari titoli trattati: un titolo rischioso $S$ ed un titolo *risk-free* $B$ ad esempio un titolo di stato (o un *saving account)* che genera un interesse $r \geq 0$ nell'arco temporale $[t, t+1]$. I suddetti titoli sono quindi rappresentabili tramite due processi stocastici i.e.:

i. $B_t = (1+r)^t = \widehat{r}^t \qquad \forall t \leq T^*$

ii. $S_{t+1} = S_t \xi_{t+1}$

ove

-$\xi_{t+1} \in \{u, d\} \qquad \forall t \leq T^* - 1$

-$d < \widehat{r} < u$

-$S_0 > 0$

-$\xi_t$ sono variabili casuali identicamente indipendentemente distribuite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

e ove $\mathcal{F}$ é la $\sigma-$algebra di tutti i possibili sottoinsiemi di $\Omega$ cioè: $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ovvero $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ e $P$ é il *set* di misure di probabilità che soddisfano la seguente proprietà:

$P\{\xi_t = u\} = p = 1 - P\{\xi_t = d\} \qquad \forall t \leq T^*$

Dato che $\Omega$ è definito da tutti i possibili valori assumibili dalla variabile casuale $\xi_t$, allora:

$\mathcal{F} = \sigma(\Omega) = \sigma(\xi_0, \xi_1, ...., \xi_t)$, $\forall t \leq T^*$

e data la definizione del processo $S$:

$\sigma(\xi_0, \xi_1, ...., \xi_t) = \sigma(S_0, S_1, ...., S_t) \qquad \forall t \leq T^*$

Si definisce $\sigma(S_0, S_1, ...., S_t)$ naturale filtrazione del processo $S$ e la si denota $\mathcal{F}^S = \left(\mathcal{F}_t^S\right)_{t \leq T^*}$. La filtrazione di un processo stocastico in altri termini rappresenta il *set* di informazioni che caratterizzano il medesimo.

Per quanto precede:

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^S$

In base alle caratteristiche del processo $S$ espressa *sub ii.* si può esprimere $S_t$ come:

$S_t = S_0 \prod_{j=1}^{t} \xi_j \qquad \forall t \leq T^*$ ed equivalentemente

$S_t = S_0 \cdot e^{\sum_{j=1}^{t} \zeta_j} \qquad \forall t \leq T^*$

ove $\zeta_t$ sono identicamente indipendente distribuite nuovamente sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ovvero:

$P\{\zeta_t = \ln u\} = p = 1 - P\{\zeta_t = \ln d\} \qquad \forall t \leq T^*$

Da qui che il processo $S$ é spesso denominato *random walk* esponenziale.

### 1.4.1 La replicazione del portafoglio

Come effettuato nel paragrafo [1.2] si assume di voler replicare la posizione di un investitore corto su di una *call.*

In tal caso, dato che ci si muove su di un orizzonte multiperiodale, allora si definisce il portafoglio di replica $\phi$ al tempo $T-1$ assumendo che replichi esattamente il *pay-off* della *call* al tempo $T$. $(C_T)$ :

$V_T(\phi) = \alpha_{T-1}S_T + \beta_{T-1}\widehat{r} = C_T = (S_T - K)^+$ [9]

Dato che $S_T = S_{T-1}\xi_T$ la [9] si può riscrivere come:

$V_T(\phi) = \alpha_{T-1}S_{T-1}\xi_T + \beta_{T-1}\widehat{r} = C_T = (S_{T-1}\xi_T - K)^+$

Dato che $\xi_T$ può assumere solo due valori: u, d si determina quindi come già visto nel par. [1.2] il sistema:

$$V_T(\phi)(\xi) = \left\{ \begin{array}{lll} V_T^u(\phi) = \alpha_{T-1}uS_{T-1} + \widehat{r}\beta_{T-1} = (S_{T-1}u - K)^+ & se & \xi_T = u \\ V_T^d(\phi) = \alpha_{T-1}dS_{T-1} + \widehat{r}\beta_{T-1} = (S_{T-1}d - K)^+ & se & \xi_T = d \end{array} \right\}$$

Tale sistema ha una soluzione unica:

$\alpha_{T-1} = \frac{(S_{T-1}u-K)^+ - (S_{T-1}d-K)^+}{S_{T-1}(u-d)}$ [10.$a$]

$\beta_{T-1} = \frac{u(S_{T-1}d-K)^+ - d(uS_{T-1}-K)^+}{\widehat{r}(u-d)}$ [10.$b$]

Inoltre, per definizione il valore del portafoglio al tempo $T-1$ é uguale al valore della *call* al tempo $T-1$ :

$V_{T-1}(\phi) = \alpha_{T-1}S_{T-1} + \beta_{T-1} = C_{T-1}$ [11]

Sostituendo i valori di $\alpha_{T-1}$ e $\beta_{T-1}$ nella [11], si ottiene:

$$V_{T-1}(\phi) = \frac{(S_{T-1}u-K)^+ - (S_{T-1}d-K)^+}{S_{T-1}(u-d)} S_{T-1} + \frac{u(S_{T-1}d-K)^+ - d(uS_{T-1}-K)^+}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{\widehat{r}\left[(S_{T-1}u-K)^+ - (S_{T-1}d-K)^+\right] + u(S_{T-1}d-K)^+ - d(uS_{T-1}-K)^+}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{(\widehat{r}-d)(S_{T-1}u-K)^+ + (u-\widehat{r})(S_{T-1}d-K)^+}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \widehat{r}^{-1}\left[\frac{(\widehat{r}-d)(S_{T-1}u-K)^+}{(u-d)} + \frac{(u-\widehat{r})(S_{T-1}d-K)^+}{(u-d)}\right]$$

definendo:

$p_* = \frac{(\widehat{r}-d)}{(u-d)}$

$(1-p_*) = 1 - \frac{(\widehat{r}-d)}{(u-d)} = \frac{(u-\widehat{r})}{(u-d)}$

dato che per ipotesi $V_{T-1}(\phi) = C_{T-1}$ si ha il valore della *call* al tempo $T-1$ :

$V_{T-1}(\phi) = C_{T-1} = \widehat{r}^{-1}\left[p_*(S_{T-1}u - K)^+ + (1-p_*)(S_{T-1}d - K)^+\right]$ [12]

La procedura viene iterata per definire il valore del portafoglio di replica al tempo $T-1$ e, quindi, individuare il valore della *call* al tempo $T-2$ :

$V_{T-1}(\phi) = \alpha_{T-2}S_{T-1} + \beta_{T-2}\widehat{r} = C_{T-1}$ [13]

Da qui che utilizzando le proprietà del processo $S$ :

$V_{T-1}(\phi) = \alpha_{T-2}\xi_{T-1}S_{T-2} + \beta_{T-2}\widehat{r} = C_{T-1}$ [14]

Dato che la [12] ci fornisce il valore di $C_{T-1}$ la [14] si può riscrivere come:

$\alpha_{T-2}\xi_{T-1}S_{T-2} + \beta_{T-2}\widehat{r} = \widehat{r}^{-1}\left[p_*(S_{T-1}u - K)^+ + (1-p_*)(S_{T-1}d - K)^+\right]$ [15]

Da qui:

$\alpha_{T-2}\xi_{T-1}S_{T-2} + \beta_{T-2}\widehat{r} = \widehat{r}^{-1}\left[p_*(\xi_{T-1}S_{T-2}u - K)^+ + (1-p_*)(\xi_{T-1}S_{T-2}d - K)^+\right]$ [16]

Si definisce quindi un nuovo sistema che fornisce i valori di $\alpha_{T-2}$ e $\beta_{T-2}$ :

$$V_{T-1}(\phi)(\xi) = \left\{ \begin{array}{lll} V_{T-1}^u(\phi) = \alpha_{T-2}uS_{T-2} + \widehat{r}\beta_{T-2} = C_{T-1}^u & if & \xi_T = u \\ V_{T-1}^d(\phi) = \alpha_{T-2}dS_{T-2} + \widehat{r}\beta_{T-2} = C_{T-1}^d & if & \xi_T = d \end{array} \right\}$$

dove:

$C_{T-1}^u = \widehat{r}^{-1}\left[p_*(S_{T-2}u^2 - K)^+ + (1-p_*)(S_{T-2}ud - K)^+\right]$ [17$a$]

$C_{T-1}^d = \widehat{r}^{-1}\left[p_*(S_{T-2}ud - K)^+ + (1-p_*)(S_{T-2}d^2 - K)^+\right]$ [17$b$]

La soluzione di tale sistema é:

$\alpha_{T-2} = \frac{C_{T-1}^u - C_{T-1}^d}{S_{T-2}(u-d)}$ [18$a$]

$\beta_{T-2} = \frac{uC_{T-1}^d - dC_{T-1}^u}{\widehat{r}(u-d)}$ [18$b$]

Inoltre per definizione il valore del portafoglio al tempo $T-2$ é uguale al valore della *call* al tempo $T-2$ :

$V_{T-2}(\phi) = \alpha_{T-2} S_{T-2} + \beta_{T-2} = C_{T-2}$ [19]

Sostituendo la [18$a$] e la [18$b$] nella [19] si ottiene:

$$C_{T-2} = \frac{C^u_{T-1} - C^d_{T-1}}{S_{T-2}(u-d)} S_{T-2} + \frac{uC^d_{T-1} - dC^u_{T-1}}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{\widehat{r}\left(C^u_{T-1} - C^d_{T-1}\right) + uC^d_{T-1} - dC^u_{T-1}}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \frac{(\widehat{r}-d)C^u_{T-1} + (u-\widehat{r})C^d_{T-1}}{(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \frac{(\widehat{r}-d)C^u_{T-1}}{(u-d)} + \frac{(u-\widehat{r})C^d_{T-1}}{(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \left(p_* C^u_{T-1} + (1-p_*)\, C^d_{T-1}\right) =$$

sostituendo la [17$a$] e la [17$b$] si ottiene:

$$C_{T-2} = \tfrac{1}{\widehat{r}}\{p_* \left[\widehat{r}^{-1} \left[p_*(S_{T-2}u^2 - K)^+ + (1-p_*)\,(S_{T-2}ud - K)^+\right]\right]$$
$$+ (1-p_*) \left[\widehat{r}^{-1} \left[p_*(S_{T-2}ud - K)^+ + (1-p_*)\,(S_{T-2}d^2 - K)^+\right]\right]\}$$

semplificando

$$C_{T-2} = \tfrac{1}{\widehat{r}^2}[p_*^2(S_{T-2}u^2 - K)^+ + 2p_*\,(1-p_*)\,(S_{T-2}ud - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2\,(S_{T-2}d^2 - K)^+] \qquad [19a]$$

La procedura viene iterata per definire il valore del portafoglio di replica al tempo $T-2$ e, quindi, individuare il valore della *call* al tempo $T-3$ :

$V_{T-2}(\phi) = \alpha_{T-3} S_{T-2} + \beta_{T-3}\widehat{r} = C_{T-2}$ [$i$]

Da qui che utilizzando le proprietà del processo $S$ :

$V_{T-2}(\phi) = \alpha_{T-3} \xi_{T-2} S_{T-3} + \beta_{T-3}\widehat{r} = C_{T-2}$ [$ii$]

Dato che la [19$a$] ci fornisce il valore di $C_{T-2}$ la [$i$] si può riscrivere come:

$$\alpha_{T-3}\xi_{T-2}S_{T-3} + \beta_{T-3}\widehat{r} = \tfrac{1}{\widehat{r}^2}[p_*^2(S_{T-2}u^2 - K)^+ +$$
$$+2p_*\,(1-p_*)\,(S_{T-2}ud - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2\,(S_{T-2}d^2 - K)^+] \qquad [iii]$$

Da qui:

$$\alpha_{T-3}\xi_{T-2}S_{T-3} + \beta_{T-3}\widehat{r} = \tfrac{1}{\widehat{r}^2}[p_*^2(S_{T-3}\xi_{T-2}u^2 - K)^+ +$$
$$+2p_*\,(1-p_*)\,(S_{T-3}\xi_{T-2}ud - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2\,(S_{T-3}\xi_{T-2}d^2 - K)^+] \qquad [iv]$$

Si definisce quindi un nuovo sistema che fornisce i valori di $\alpha_{T-3}$ e $\beta_{T-3}$ :

$$V_{T-2}(\phi)(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} V^u_{T-2}(\phi) = \alpha_{T-3} u S_{T-3} + \widehat{r}\beta_{T-3} = C^u_{T-2} \quad if \quad \xi_T = u \\ V^d_{T-2}(\phi) = \alpha_{T-3} d S_{T-3} + \widehat{r}\beta_{T-3} = C^d_{T-2} \quad if \quad \xi_T = d \end{array} \right\}$$

dove:

$$C^u_{T-2} = \tfrac{1}{\widehat{r}^2}[p_*^2(S_{T-3}u^3 - K)^+ + 2p_*\,(1-p_*)\,(S_{T-3}u^2 d - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2\,(S_{T-3}ud^2 - K)^+] \qquad [v-a]$$
$$C^d_{T-2} = \tfrac{1}{\widehat{r}^2}[p_*^2(S_{T-3}du^2 - K)^+ + 2p_*\,(1-p_*)\,(S_{T-3}d^2 u - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2\,(S_{T-3}d^3 - K)^+] \qquad [v-b]$$

La soluzione di tale sistema é:

$$\alpha_{T-3} = \frac{C^u_{T-2} - C^d_{T-2}}{S_{T-3}(u-d)} \qquad [vi-a]$$
$$\beta_{T-3} = \frac{uC^d_{T-2} - dC^u_{T-2}}{\widehat{r}(u-d)} \qquad [vi-b]$$

Inoltre per definizione il valore del portafoglio al tempo $T-3$ é uguale al valore della *call* al tempo $T-3$ :

$V_{T-3}(\phi) = \alpha_{T-3} S_{T-3} + \beta_{T-3} = C_{T-3}$ [$vii$]

Sostituendo la [$vi - a$] e la [$vi - b$] nella [$vii$] si ottiene:

$$C_{T-3} = \frac{C^u_{T-2} - C^d_{T-2}}{S_{T-3}(u-d)} S_{T-2} + \frac{uC^d_{T-2} - dC^u_{T-2}}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{\widehat{r}\left(C^u_{T-2} - C^d_{T-2}\right) + uC^d_{T-2} - dC^u_{T-2}}{\widehat{r}(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \frac{(\widehat{r}-d)C^u_{T-2} + (u-\widehat{r})C^d_{T-2}}{(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \frac{(\widehat{r}-d)C^u_{T-2}}{(u-d)} + \frac{(u-\widehat{r})C^d_{T-2}}{(u-d)} =$$
$$= \frac{1}{\widehat{r}} \left(p_* C^u_{T-2} + (1-p_*)\, C^d_{T-2}\right) =$$

sostituendo la [$v - a$] e la [$v - b$] si ottiene:

$$C_{T-3} = \frac{1}{\widehat{r}} \{ p_* [\frac{1}{\widehat{r}^2} [p_*^2 (S_{T-3} u^3 - K)^+ + 2p_* (1-p_*) (S_{T-3} u^2 d - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2 (S_{T-3} u d^2 - K)^+ ]] +$$
$$+ (1-p_*) \frac{1}{\widehat{r}^2} [p_*^2 (S_{T-3} d u^2 - K)^+ + 2p_* (1-p_*) (S_{T-3} d^2 u - K)^+ +$$
$$+ (1-p_*)^2 (S_{T-3} d^3 - K)^+ ]\}$$

semplificando

$$C_{T-3} = \frac{1}{\widehat{r}^3} [p_*^3 (S_{T-3} u^3 - K)^+ + 2p_*^2 (1-p_*) (S_{T-3} u^2 d - K)^+ +$$
$$+ p_* (1-p_*)^2 (S_{T-3} u d^2 - K)^+ + p_*^2 (1-p_*) (S_{T-3} u^2 d - K)^+ +$$
$$+ 2p_* (1-p_*)^2 (S_{T-3} u d^2 - K)^+ + (1-p_*)^3 (S_{T-3} d^3 - K)^+ ]$$

semplificando

$$C_{T-3} = \frac{1}{\widehat{r}^3} [p_*^3 (S_{T-3} u^3 - K)^+ + 3p_*^2 (1-p_*) (S_{T-3} u^2 d - K)^+ +$$
$$+ 3p_* (1-p_*)^2 (S_{T-3} u d^2 - K)^+ + (1-p_*)^3 (S_{T-3} d^3 - K)^+ ] \qquad [viii]$$

In base ai risultati offerti dalla [12], [$19a$] e dalla [$viii$], si può generalizzare la formula che offre il valore di una *call* europea al generico tempo $t = T - m$:

$$C_{T-m} = \frac{1}{\widehat{r}^m} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} \left(u^j d^{m-j} S_{T-m} - K\right)^+ \qquad [20a]$$

per $m = 1, ....., T$

Allo scopo di rimuovere la funzione di massimo da tale formula, si definisce:

$a = \inf \left\{ j \in N^+ \mid S_{T-m} u^j d^{m-j} - K > 0 \right\}$

Da qui che la [$20a$] può essere riscritta come:

$$C_{T-m} = \frac{1}{\widehat{r}^m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} \left(u^j d^{m-j} S_{T-m} - K\right)$$

e da qui che:

$$C_{T-m} = \frac{1}{\widehat{r}^m} \left( \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} u^j d^{m-j} S_{T-m} - K \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} \right)$$

semplificando:

$$C_{T-m} = \frac{S_{T-m}}{\widehat{r}^m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} (p_* u)^j [(1-p_*)\, d]^{m-j} - \frac{K}{\widehat{r}^m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j}$$

e portando $\widehat{r}^m$ all'interno della prima sommatoria si ottiene:

$$C_{T-m} = S_{T-m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} \left(p_* \frac{u}{\widehat{r}}\right)^j \left(1 - p_* \frac{u}{\widehat{r}}\right)^{m-j} - \frac{K}{\widehat{r}^m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} \qquad [20]$$

Il valore ottenuto, ripetendo argomentazioni analoghe a quelle individuate al par.[1.2] fornisce il **prezzo di arbitraggio in un'economia neutrale al rischio**

### 1.4.2 La misura martingala di probabilità

Si dice che $S^*$segue una misura di Martingala $P^*$ o piú semplicemente $S^*$ é una $P^*-$Martingala, quando con rispetto alla sua naturale filtrazione $\digamma^S$, viene rispettata l'uguaglianza:

$S_t^* = E_{P^*}(S_{t+1}^* \mid \digamma_t^S) \qquad \forall t \leq T^* - 1$

Si esplicita di seguito l'espressione precedente allo scopo di individuare tale misura:

$\widehat{r}^{-t} S_t = E_{P^*}(\widehat{r}^{-(t+1)} \xi_{t+1} S_t \mid \digamma_t^S) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

dato che $\widehat{r}^{-(t+1)}$ é una costante si può portare fuori dalla parentesi:

$\widehat{r}^{-t} S_t = \widehat{r}^{-(t+1)} E_{P^*}(\xi_{t+1} S_t \mid \digamma_t^S) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

esplicitando la $\sigma-$algebra all'interno della media condizionale si ottiene:

$\widehat{r}^{-t} S_t = \widehat{r}^{-(t+1)} E_{P^*}(\xi_{t+1} S_t \mid S_0, S_1, ...., S_t) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

dato che $S_t$ è adattato a $S_0, S_1, ...., S_t$ si può portare fuori dalla parentesi:

$\widehat{r}^{-t} S_t = \widehat{r}^{-(t+1)} S_t E_{P^*}(\xi_{t+1} \mid S_0, S_1, ...., S_t) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

semplificando:

$\widehat{r} = E_{P^*}(\xi_{t+1} \mid S_0, S_1, ...., S_t) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

Dato che $\xi_{t+1}$ è per ipotesi indipendente da $S_0, S_1, ...., S_t$ allora:

$\widehat{r} = E_{P^*}(\xi_{t+1}) \qquad \forall t \leq T^* - 1 \qquad \Rightarrow$

data le caratteristiche distributive di $\xi_{t+1}$ si ha:

$\widehat{r} = up + (1-p)d$

risolvendo per $p$ si ottiene il valore di $p_*$ :

$p_* = \frac{\widehat{r}-d}{u-d} \qquad [21a]$

e quindi

$(1-p_*) = \frac{(u-\widehat{r})}{(u-d)} \qquad [21b]$

Dato che si é dimostrato nel par. [1.3] che la misura di martingala $p_*$ di $S^*$ è la stessa del *contingent claim* il cui *pay-off* insiste su $S^*$, allora la misura di probabilità testè trovata dovrebbe soddisfare anche la seguente uguaglianza che fornisce il prezzo della *call* al tempo $t = T - m$ con scadenza al tempo $T$ per $m = 1, ..., T$.:

$C_{T-m}^* = E_{P^*}(\widehat{r}^{-m}(S_T - K)^+ \mid \digamma_{T-m}^S) \qquad \forall m \leq T$

Si dimostra di seguito che tale valore è uguale a quello individuato nella [20] con il metodo della replicazione del portafoglio:

$C_{T-m}^* = E_{P^*}(\widehat{r}^{-m}(S_{T-m}\xi_{T-m+1}\xi_{T-m+2.....}\xi_T - K)^+ \mid \digamma_{T-m}^S) \qquad \forall m \leq T$

$\widehat{r}^{-m}$ è una costante e, quindi, si può portare fuori dalla parentesi:

$= \widehat{r}^{-m} E_{P^*}((S_{T-m}\xi_{T-m+1}\xi_{T-m+2.....}\xi_T - K)^+ \mid \digamma_{T-m}^S) \qquad \forall m \leq T$

$S_{T-m}$ è adattato a $\digamma_{T-m}^S$ e $\xi_{T-m+1}\xi_{T-m+2.....}\xi_T$ sono indipendenti da $\digamma_{T-m}^S$, da qui che:

$= \widehat{r} E_{P^*}((\xi_{T-m+1}\xi_{T-m+2.....}\xi_T^{-m} S_{T-m} - K)^+) \qquad \forall m \leq T$

Date le proprietà distributive di $\xi_{T-m+1}\xi_{T-m+2.....}\xi_T$ si ha:

$= \widehat{r}^{-m} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} (u^j d^{m-j} S_{T-m} - K)^+ \qquad \forall m \leq T$

definendo $a = \inf\left\{ j \in N^+ \mid S_{T-m} u^j d^{m-j} - K > 0 \right\}$ si ha:

$= \widehat{r}^{-m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j (1-p_*)^{m-j} u^j d^{m-j} S_{T-m} - K p_*^j (1-p_*)^{m-j} \qquad \forall m \leq T$

da qui che:

$$C_{T-m} = S_{T-m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} \left(p_* \frac{u}{\widehat{r}}\right)^j \left(1 - p_* \frac{u}{\widehat{r}}\right)^{m-j} - \frac{K}{\widehat{r}^m} \sum_{j=a}^{m} \binom{m}{j} p_*^j \left(1 - p_*\right)^{m-j}$$

c.v.d.

Anche nel caso piú generale quindi il metodo della martingala e quello di replicazione del portafoglio addivengono al medesimo risultato. Si può conseguentemente concludere che la prezzatura di qualsiasi *contingent claim path indipendent* di tipo europeo può essere realizzata senza perdita di generalità per il tramite del più agile ed efficace metodo della martingala.

Il modello binomiale è un modello che opera generalmente in unità temporali discrete e può venire agevolmente rappresentato per il tramite di alberi binomiali. Come ogni modello discreto la riduzione infinitesima dell'unità di tempo utilizzata lo trasforma in un modello di tipo continuo.

# Riferimenti bibliografici


[1] Brennan, M.J. (1979) The pricing of contingent claims in discrete time models. J. Finance 34, 53-68.

[2] Cox, J.C., Rubinstein, M. (1983) A survey of alternative option-pricing models. In: Option Pricing, Theory and Applications, M.Brenner, ed. Toronto, pp. 3-33.

[3] Cox, J.C., Rubinstein, M. (1985) Options Markets. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey)

[4] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979a) Option pricing: a simplified approach.J. Finan. Econom. 7, 229-263.

[5] Geman, H., ElKaroui, N., Rochet, J.C. (1995) Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing of options. J. Appl. Probab. 32, 443-458.

[6] Hull, J.C. (1997) Options, Futures, and Other Derivatives. 3rd ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey).

[7] Karatzas, I., Shreve, S. (1988) Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[8] Karatzas, I., Shreve, S. (1998) Methods of Mathematical Finance. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[9] Musiela, M., Rutkowski, M. (1997) Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[10] Protter, P. (1990) Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[11] Rendleman, R., Bartter, B. (1979) Two-state option pricing. J. Finance 34, 1093-1110.

[12] Ross, S.A. (1976b) Options and efficiency. Quart. J. Econom. 90, 75-89.

[13] Wilmott, P., Dewynne, J.N., Howison, S. (1993) Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press, Oxford.

[14] Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1995) The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction. Cambridge Universit Press, Cambridge.