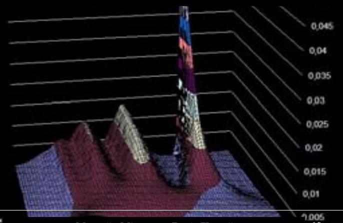
Il Pricing delle componenti derivative dei prodotti strutturati con metodi basati su trasformate di Fourier: stato dell'arte e prospettive

L'algoritmo Gauss-Lobatto via FFT

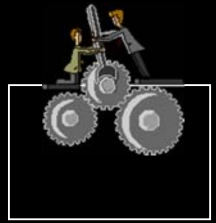
Teoria ed Implementazione



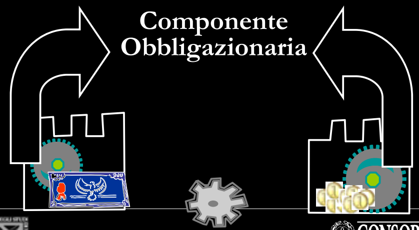
Marcello Minenna - Paolo Verzella
Risk Italia 2006 – Milano, 10 Ottobre 2006

- L'Unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option Pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

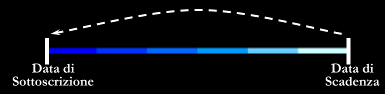
- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione



Componente Obbligazionaria



Valore Attuale



Componente Derivativa

La Componente Derivativa

RIDUCE

La Componente Obbligazionaria

Prodotti
Strutturati

La Componente Derivativa

AUMENTA

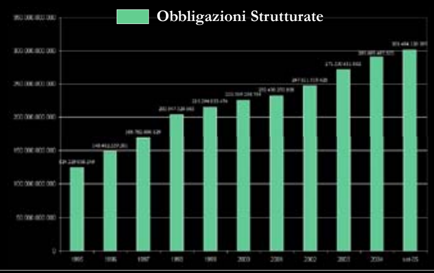
La Componente Obbligazionaria

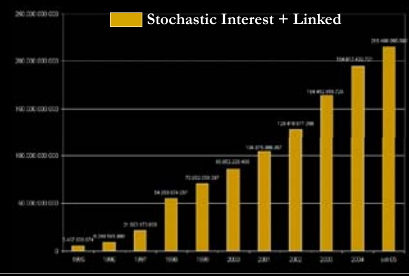
Obbligazioni
Strutturate

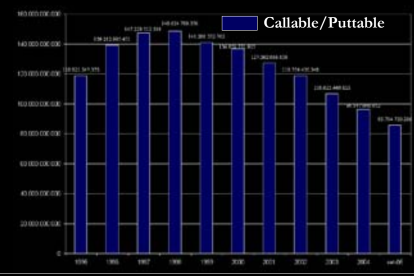
- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

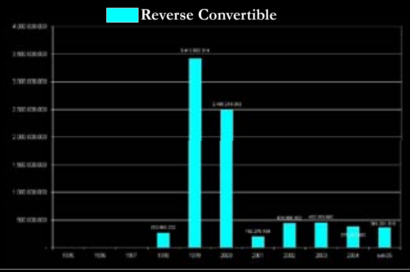
Obbligazioni Strutturate in Italia

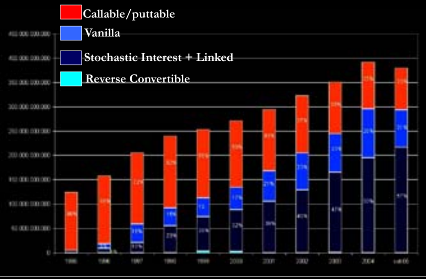
Trend sul Mercato Primario
1995 – sett '05

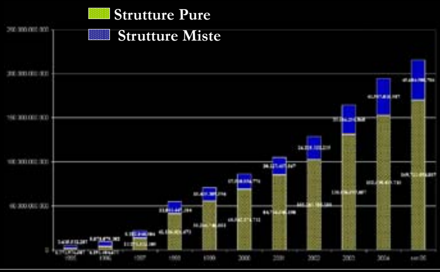












Sommario

- L'Unbundling di prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss - Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

La "Single Integration Formula"

Carr – Madan (1999)

$$C_0(\ln K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty \Re\left[e^{-iv \ln K} \psi_0(v)\right] dv$$

dove:

$$\psi_0(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha+1)v}$$

$$\phi_T[q(\ln S_T)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi \ln S_T} q(\ln S_T)\, d\ln S_T$$

La "Single Integration Formula"

Carr – Madan (1999)

$$C_0(\ln K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty \Re\left[e^{-iv \ln K} \psi_0(v)\right] dv$$

Caratteristiche Principali

Un solo integrale da calcolare (raddoppia la velocità nei metodi FT-Q)

Miglioramento dell'Accuratezza per un fattore pari ad 1/2

Scelta arbitraria di un parametro "limitante"

Implementazione FFT

Algoritmi di Quadratura

a — N-C

b — ?

Implementazione FFT

Algoritmi di Quadratura

a — N-C

b — ?

Schemi Newton – Cotes

Proposizione 5 *L'integrale di una generica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è approssimato nella forma:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \approx \frac{n}{c} h \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)} \cdot f(x_j) \qquad (3.10)$$

dove:
- ○ d *è il grado del polinomio che approssima l'integrale;*
- ○ $n = i \cdot d$ *– ove* $i = 1, 2, 3, \ldots N$ *– il numero dei sottointervalli nei quali è diviso l'intervallo* $[x_0 = \alpha, x_n = \beta]$;
- ○ $c = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(i)}$
- ○ $h = \frac{(\beta - \alpha)}{n}$ *dimensione di ogni singolo sottointervallo;*
- ○ $x_j = \alpha + jh$ *per* $j = 0, 1, \ldots, n$;

Schemi Newton – Cotes

Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica

Newton – Cotes Schemes

Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica

Ciò implica che, se la funzione caratteristica ha un comportamento *regolare*

Newton – Cotes Schemes

Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica

Ciò implica che, se la funzione caratteristica ha un comportamento *regolare*

Grado Elevato di Interpolazione = Migliore Accuratezza

Schemi Newton – Cotes

Sfortunatamente, la funzione caratteristica è SPESSO una funzione oscillatoria con sbalzi improvvisi

Così, SPESSO, gli schemi Newton – Cotes falliscono nel fornire prezzi stabili ed accurati

Schemi Newton – Cotes

Grado Elevato di Interpolazione (maggiore dell'8°) = Instabilità Numerica

Se la funzione caratteristica tende ad infinito, gli schemi NC ESPLODONO

Il Pricing via Algoritmi Newton-Cotes

Regola del Trapezio

$$C_0(\ln K)_u \approx \frac{e^{-\alpha[\ln S_0 - b + \lambda(u-1)]}}{\pi}\eta \cdot \Re\left(\sum_{j=1}^{N} e^{-i\eta\lambda(j-1)(u-1)} e^{-i\eta(j-1)[\ln S_0 - b]} \psi_0((j-1)\eta)\right)$$

Il Pricing via Algoritmi Newton-Cotes

Regola di Simpson

$$C_0[\ln K]_u \simeq \frac{e^{-\alpha[\ln S_0 - b + \lambda(u-1)]}}{\pi}\frac{\eta}{3} \cdot \Re\left\{\sum_{j=1}^{N} e^{-i\eta\lambda(j-1)(u-1)} e^{-i(j-1)\eta[\ln S_0 - b]} \psi_0((j-1)\eta) \cdot \left(3 + (-1)^j - \delta_{j-1}\right)\right\}$$

Schemi NC

Utilizzando la seguente specificazione parametrica (parametri ricombinanti)

$$[\ln K]_u = \ln S_t - b + \lambda (u-1)$$

$$\lambda \eta = \frac{2\pi}{N}$$

Schemi NC

Utilizzando la seguente specificazione parametrica (parametri ricombinanti)

$$[\ln K]_u = \ln S_t - b + \lambda (u-1)$$

$$\lambda \eta = \frac{2\pi}{N}$$

I prezzi Call sono calcolati via Algoritmo Cooley-Tukey

Implementazione FFT

Algoritmi di Quadratura

a N-C

b Gauss

Sommario

- L'Unbundling di prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - L'option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

Schemi di Gauss

Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione

Schemi di Gauss

Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione

I punti di discretizzazione sono scelti in maniera tale da riprodurre perfettamente una funzione polinomiale

Schemi di Gauss

Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione

I punti di discretizzazione sono scelti in maniera tale da riprodurre perfettamente una funzione polinomiale

Schemi differenti corrispondono alla scelta di diversi criteri di ottimizzazione

- Esempio: Formula di Quadratura Gauss-Lobatto

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_1 f(-1) + w_N f(1) + \sum_{i=2}^{N-1} w_i f(x_i)$$

$$w_i = \frac{2}{N(N-1)\left[P_{N-1}(x_i)\right]^2}$$

LIMITATA
all'intervallo (-1,1)

$$w_1 = w_N = \frac{2}{N(N-1)}$$

dove $P_{N-1}(x)$

è un polinomio di Legendre di ordine *N-1*

$$y_1(x) = \gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} x^{2m} \quad per\ \varphi = 2m$$

$$y_2(x) = \gamma_1 x + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m+1} x^{2m+1} \quad per\ \varphi = 2m+1$$

L'Estensione di Gautschi - Gander (2000)

MIGLIORA
la formula Gauss Lobatto

Il lavoro sviluppa un algoritmo GL sia ricorsivo che adattivo per un intervallo generico

L'Estensione di Gautschi - Gander (2000)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \approx h\left\{ w_1 f(\alpha) + w_N f(\beta) + \sum_{i=2}^{N-1} w_i \left[f(m + x_i h)\right] \right\}$$

$$w_i = \frac{2}{N(N-1)\left[P_{N-1}(x_i)\right]^2}$$

$$w_1 = w_N = \frac{2}{N(N-1)}$$

$$h = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

$$m = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Lo schema Gauss-Lobatto Esteso è

Accurato

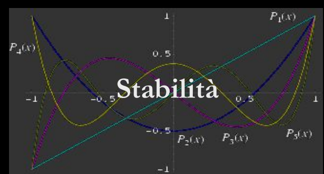
Stabile

Vediamo come

Accuratezza

Il Teorema Fondamentale della Quadratura Gaussiana postula che le ascisse ottimali di una formula di quadratura gaussiana a N punti, sono precisamente le radici del polinomio ortogonale per il medesimo intervallo e per la medesima funzione di peso

Le radici dei polinomi di Legendre sono punti di discretizzazione ottimi



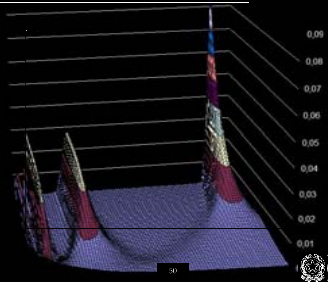
I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie

I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie

Incrementare l'ordine di grandezza di N è spesso utile per riprodurre il decadimento oscillatorio della funzione caratteristica

I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie

Anche se grande, N rimane finito, in maniera tale che gli schemi GL non possono ESPLODERE quando la funzione caratteristica tende ad infinito



Sommario

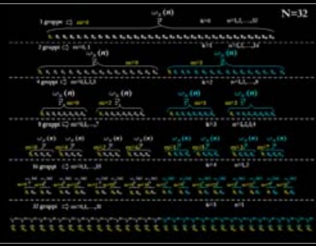
- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

Il Pricing via Algoritmi Gauss-Lobatto

$$C_0(\ln K) \simeq \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} a \left\{ \frac{1}{N(N-1)} \left[\Re\left[e^{-iv_0 \ln K}\psi_0(v_0)\right] + \Re\left[e^{-iv_a \ln K}\psi_0(v_a)\right]\right] + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^2} \Re\left[e^{-i\left(\frac{1}{2}a(1+v_i)\right)\ln K}\psi_0\left(\frac{1}{2}a(1+v_i)\right)\right] \right\}$$

Il Pricing via Algoritmi Gauss-Lobatto

Richiede un opportuno riaggiustamento dell'algoritmo Cooley-Tukey per poter utilizzare una griglia di campionamento variabile



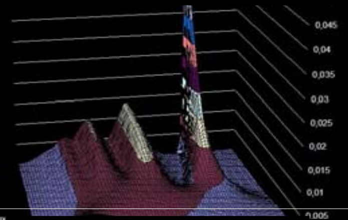
Sommario

- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

Il Pricing delle componenti derivative dei prodotti strutturati con metodi basati su trasformate di Fourier: stato dell'arte e prospettive

L'algoritmo Gauss-Lobatto via FFT

Teoria ed Implementazione



Marcello Minenna - Paolo Verzella
Structured Products Italia 2006 – Milano, 10 Ottobre 2006