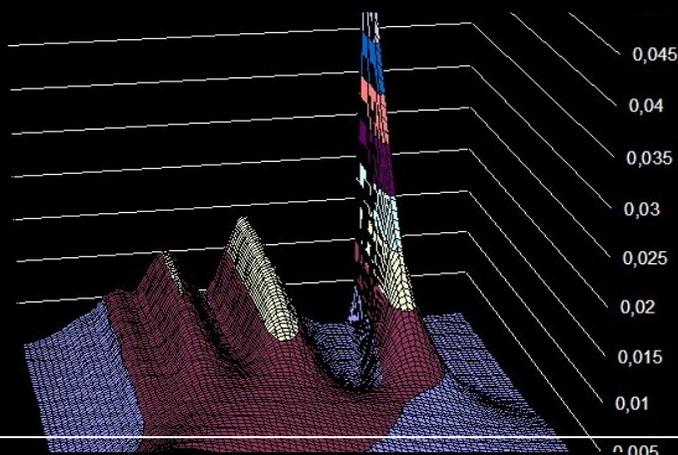


## L' algoritmo Gauss-Lobatto via FFT

Teoria ed Implementazione



## Sommario

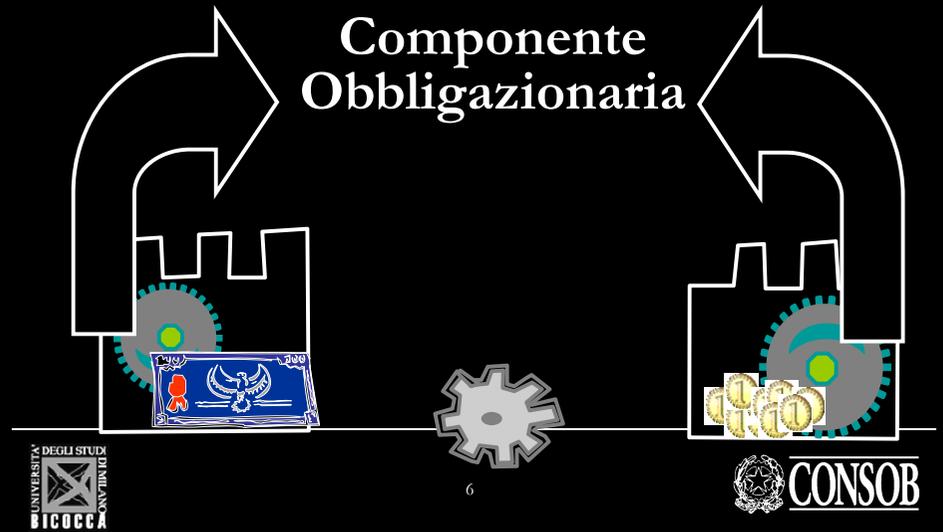
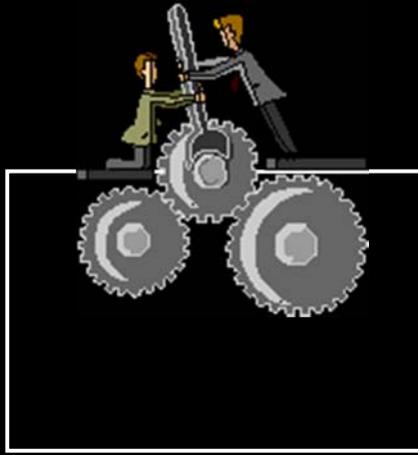
- L'Unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option Pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

## Sommario

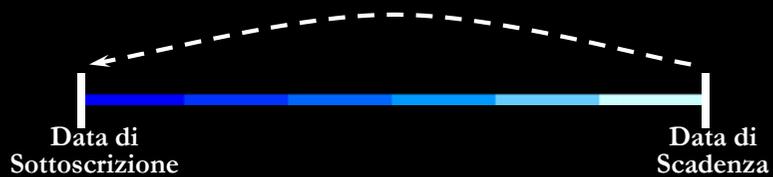
- **L'unbundling dei prodotti strutturati**
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

## L'Unbundling dei Prodotti Strutturati

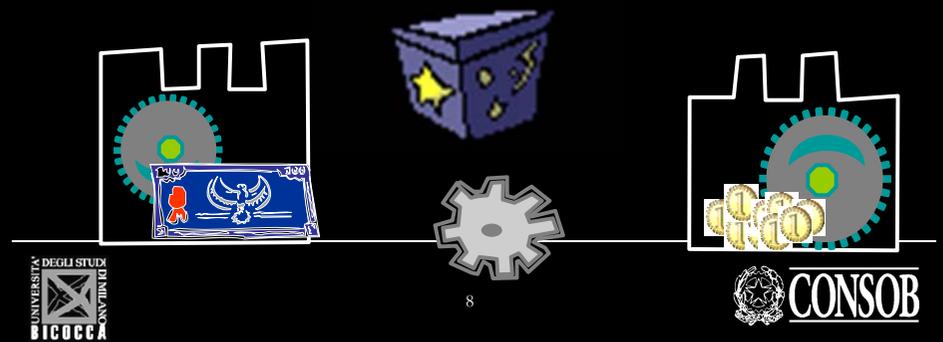




### Valore Attuale



### Componente Derivativa



## La Componente Derivativa



RIDUCE

## La Componente Obbligazionaria



Prodotti  
Strutturati

### Sommario

- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

## La Componente Derivativa



AUMENTA

## La Componente Obbligazionaria

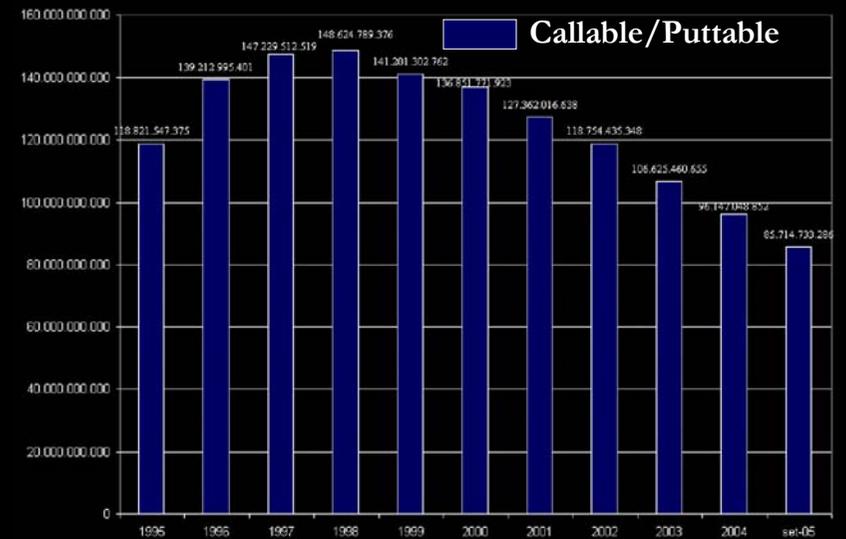
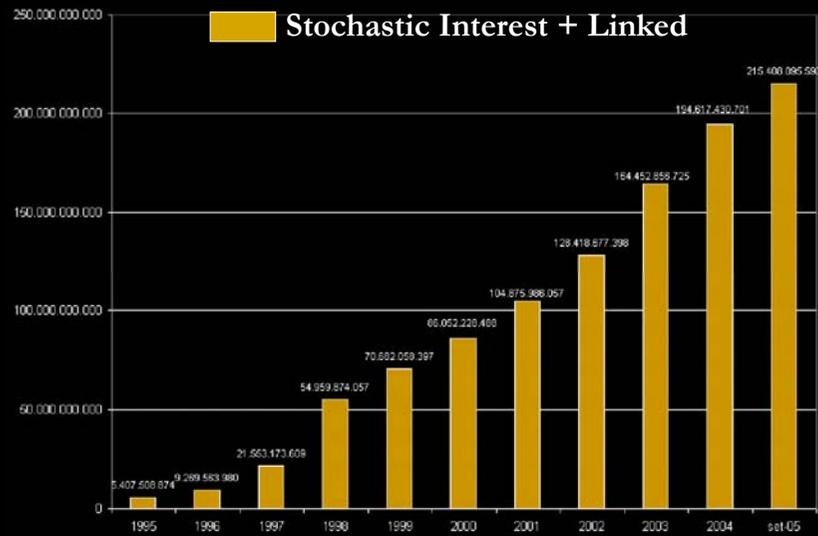


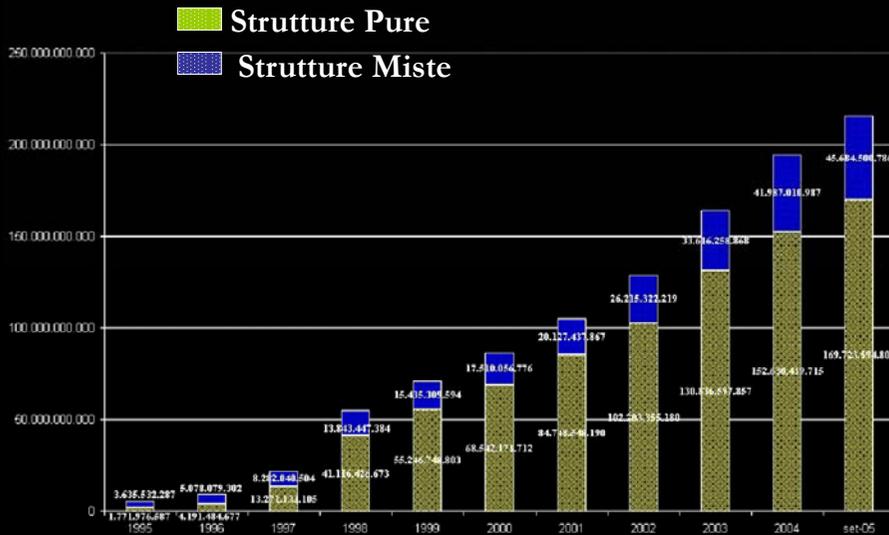
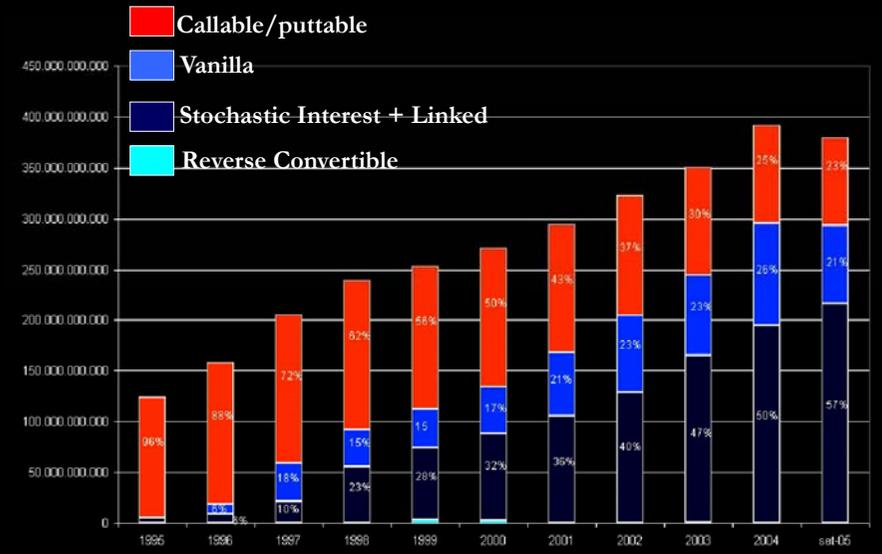
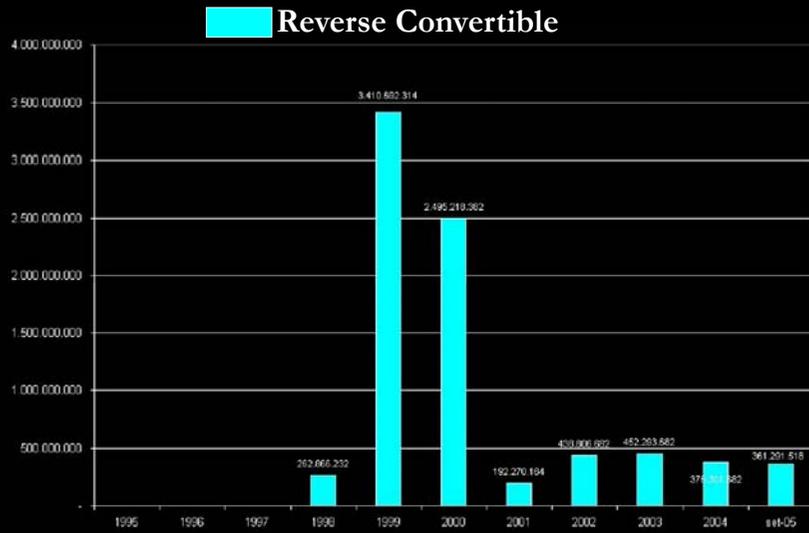
Obbligazioni  
Strutturate

### Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia

## Obbligazioni Strutturate in Italia

Trend sul Mercato Primario  
1995 – sett '05





### Sommario

- L'Unbundling di prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss - Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

### La “Single Integration Formula”

Carr – Madan (1999)

$$C_0(\ln K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ e^{-iv \ln K} \psi_0(v) \right] dv$$

dove:

$$\psi_0(v) = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v}$$

$$\phi_T[q(\ln S_T)](\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi \ln S_T} q(\ln S_T) d \ln S_T$$

### La “Single Integration Formula”

Carr – Madan (1999)

$$C_0(\ln K) = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ e^{-iv \ln K} \psi_0(v) \right] dv$$

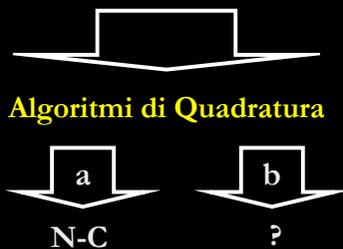
## Caratteristiche Principali

Un solo integrale da calcolare (raddoppia la velocità nei metodi FT-Q)

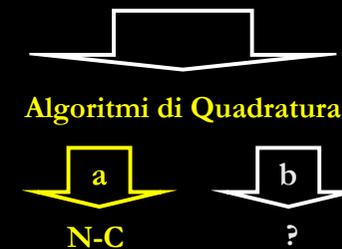
Miglioramento dell'Accuratezza per un fattore pari ad 1/2

Scelta arbitraria di un parametro “limitante”

## Implementazione FFT



## Implementazione FFT



## Schemi Newton – Cotes

**Proposizione 5** L'integrale di una generica funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è approssimato nella forma:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{j=0}^n a_j^{(i)} \cdot f(x_j) \quad (3.10)$$

dove:

- $d$  è il grado del polinomio che approssima l'integrale;
- $n = i \cdot d$  – ove  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  – il numero dei sottointervalli nei quali è diviso l'intervallo  $[x_0 = \alpha, x_n = \beta]$ ;
- $c = \sum_{j=0}^n a_j^{(i)}$
- $h = \frac{(\beta - \alpha)}{n}$  dimensione di ogni singolo sottointervallo;
- $x_j = \alpha + jh$  per  $j = 0, 1, \dots, n$ ;

## Schemi Newton – Cotes



Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica

## Newton – Cotes Schemes



Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica



Ciò implica che, se la funzione caratteristica ha un comportamento *regolare*

## Newton – Cotes Schemes



Sono caratterizzati da una griglia di discretizzazione a punti fissi ed equispaziati per la funzione caratteristica



Ciò implica che, se la funzione caratteristica ha un comportamento *regolare*



Grado Elevato di Interpolazione = Migliore Accuratezza

### Schemi Newton – Cotes



Sfortunatamente, la funzione caratteristica è **SPESSE** una funzione oscillatoria con sbalzi improvvisi



Così, **SPESSE**, gli schemi Newton – Cotes falliscono nel fornire prezzi stabili ed accurati

### Schemi Newton – Cotes



Grado Elevato di Interpolazione (maggiore dell'8°) = Instabilità Numerica



Se la funzione caratteristica tende ad infinito, gli schemi **NC ESPLODONO**

### Il Pricing via Algoritmi Newton-Cotes



Regola del Trapezio



$$C_0 (\ln K)_u \approx \frac{e^{-\alpha [\ln S_t - b + \lambda (u-1)]}}{\pi} \eta \cdot \Re \left( \sum_{j=1}^N e^{-i\eta \lambda (j-1)(u-1)} e^{-i\eta (j-1) [\ln S_t - b]} \psi_0 ((j-1) \eta) \right)$$

### Il Pricing via Algoritmi Newton-Cotes



Regola di Simpson



$$C_0 [\ln K]_u \approx \frac{e^{-\alpha [\ln S_t - b + \lambda (u-1)]}}{\pi} \eta \cdot \Re \left\{ \sum_{j=1}^N e^{-i\eta \lambda (j-1)(u-1)} e^{-i(j-1)\eta [\ln S_t - b]} \psi_0 ((j-1) \eta) \cdot (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}) \right\}$$

## Schemi NC

Utilizzando la seguente specificazione  
parametrica  
(parametri ricombinanti)

$$[\ln K]_u = \ln S_t - b + \lambda (u - 1)$$

$$\lambda \eta = \frac{2\pi}{N}$$

## Schemi NC

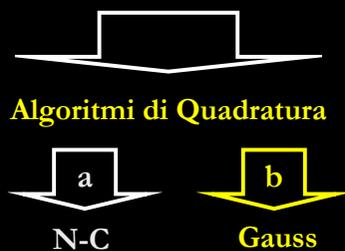
Utilizzando la seguente specificazione  
parametrica  
(parametri ricombinanti)

$$[\ln K]_u = \ln S_t - b + \lambda (u - 1)$$

$$\lambda \eta = \frac{2\pi}{N}$$

I prezzi Call sono calcolati via Algoritmo  
Cooley-Tukey

# Implementazione FFT



## Sommario

- L'Unbundling di prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- **Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT**
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - L'option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione

### Schemi di Gauss



Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione

### Schemi di Gauss



Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione



I punti di discretizzazione sono scelti in maniera tale da riprodurre perfettamente una funzione polinomiale

### Schemi di Gauss



Viene utilizzata una scelta ottimale per la griglia di discretizzazione



I punti di discretizzazione sono scelti in maniera tale da riprodurre perfettamente una funzione polinomiale



Schemi differenti corrispondono alla scelta di diversi criteri di ottimizzazione

### • Esempio: Formula di Quadratura Gauss-Lobatto



$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(-1) + w_N f(1) + \sum_{i=2}^{N-1} w_i f(x_i)$$

$$w_i = \frac{2}{N(N-1)[P_{N-1}(x_i)]^2}$$

**LIMITATA**  
all'intervallo (-1,1)

$$w_1 = w_N = \frac{2}{N(N-1)}$$

dove  $P_{N-1}(x)$



è un polinomio di Legendre di ordine  $N-1$



$$y_1(x) = \gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} x^{2m} \quad \text{per } \varphi = 2m$$

$$y_2(x) = \gamma_1 x + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m+1} x^{2m+1} \quad \text{per } \varphi = 2m + 1$$

## L'Estensione di Gautschi - Gander (2000)



**MIGLIORA**

la formula Gauss Lobatto

Il lavoro sviluppa un algoritmo GL sia  
ricorsivo che adattivo per un intervallo  
generico

## L'Estensione di Gautschi - Gander (2000)



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx h \left\{ w_1 f(\alpha) + w_N f(\beta) + \sum_{i=2}^{N-1} w_i [f(m + x_i h)] \right\}$$

$$w_i = \frac{2}{N(N-1) [P_{N-1}(x_i)]^2}$$

$$w_1 = w_N = \frac{2}{N(N-1)}$$

$$h = \frac{1}{2} (\beta - \alpha)$$

$$m = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

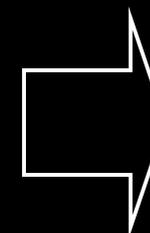
Lo schema Gauss-Lobatto Esteso è



**Accurato**

**Stabile**

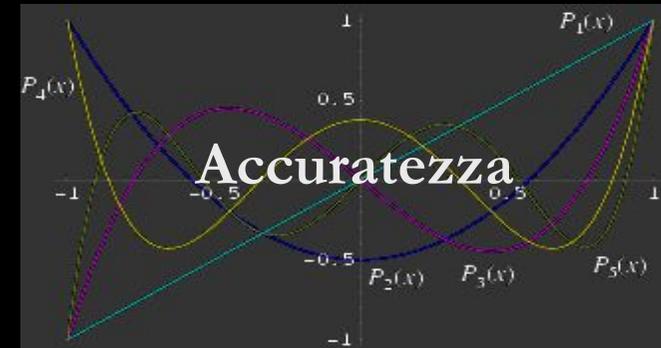
Vediamo come



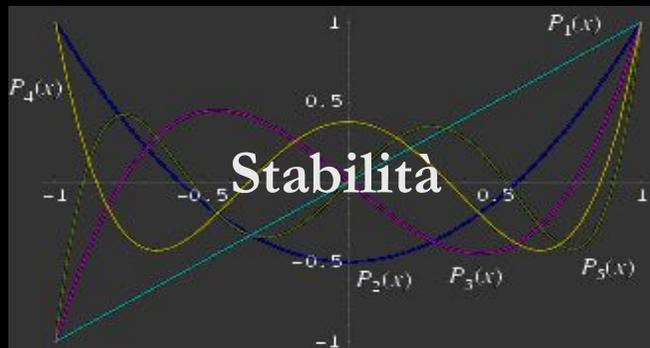
## Accuratezza



Il Teorema Fondamentale della Quadratura Gaussiana postula che **le ascisse ottimali di una formula di quadratura gaussiana a N punti, sono precisamente le radici del polinomio ortogonale per il medesimo intervallo e per la medesima funzione di peso**



Le radici dei polinomi di Legendre sono punti di discretizzazione ottimi



I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie

I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie



Incrementare l'ordine di grandezza di N è spesso utile per riprodurre il decadimento oscillatorio della funzione caratteristica

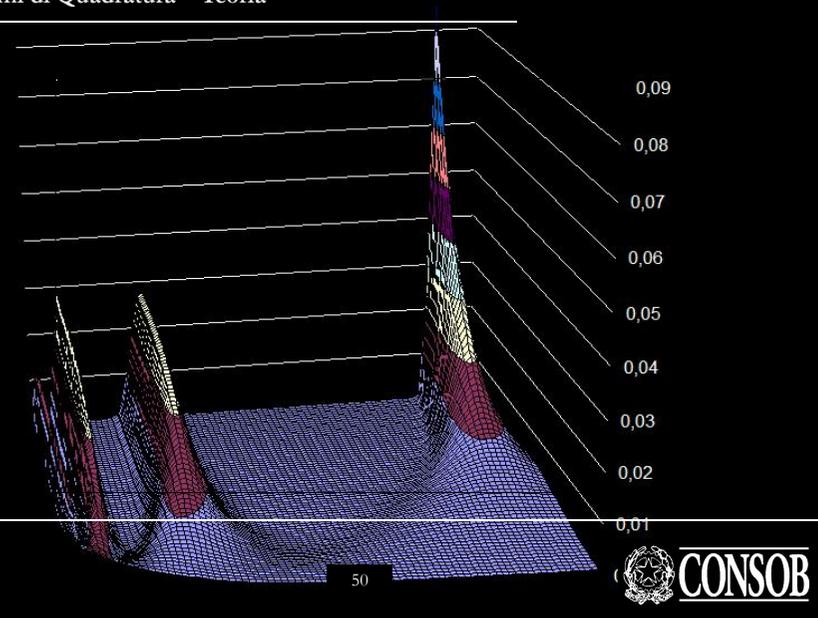
I polinomi di Legendre sono funzioni oscillatorie



Anche se grande,  $N$  rimane finito, in maniera tale che gli schemi GL non possono ESPLODERE quando la funzione caratteristica tende ad infinito

Sommario

- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- **Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT**
  - L'algoritmo Gauss Lobatto
  - **Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto**
- Performance nel Pricing e nella Calibrazione



Il Metodo Fast Fourier Transform – Il Pricing via Algoritmi di Quadratura

Il Pricing via Algoritmi Gauss-Lobatto

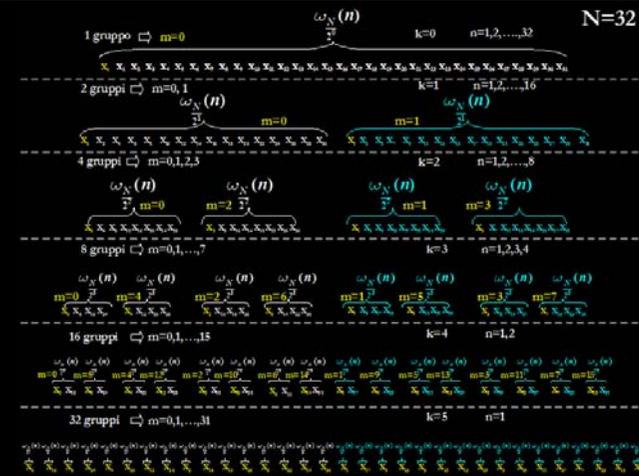


$$C_0(\ln K) \simeq \frac{e^{-a \ln K}}{\pi} a \left\{ \frac{1}{N(N-1)} \left[ \Re \left[ e^{-i v_0 \ln K} \psi_0(v_0) \right] + \Re \left[ e^{-i v_a \ln K} \psi_0(v_a) \right] \right] + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{N(N-1) [P_{N-1}(x_i)]^2} \Re \left[ e^{-i \left( \frac{1}{2} a (1+v_i) \right) \ln K} \psi_0 \left( \frac{1}{2} a (1+v_i) \right) \right] \right\}$$

## Il Pricing via Algoritmi Gauss-Lobatto



Richiede un opportuno riaggiustamento dell'algorithmo Cooley-Tukey per poter utilizzare una griglia di campionamento variabile



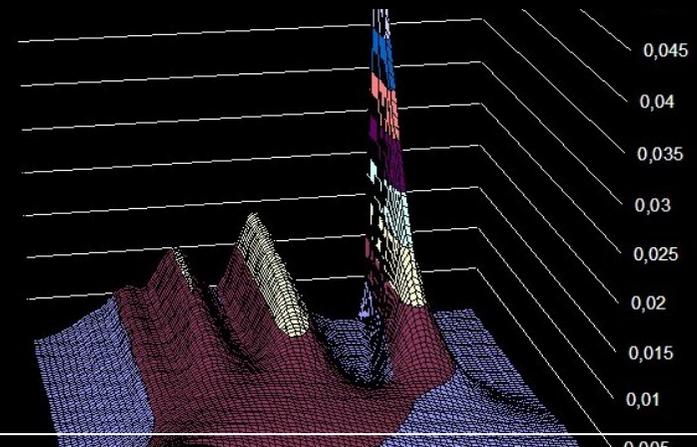
### Sommario

- L'unbundling dei prodotti strutturati
  - Il mercato delle Obbligazioni Strutturate in Italia
- L'Option Pricing via FFT: una sintesi
- Un approccio Gauss-Lobatto all'uso delle FFT
  - L'algorithmo Gauss Lobatto
  - Option pricing con algoritmi Gauss Lobatto
- **Performance nel Pricing e nella Calibrazione**

Il Pricing delle componenti derivative dei prodotti strutturati con metodi basati su trasformate di Fourier: stato dell'arte e prospettive

## L'algorithmo Gauss-Lobatto via FFT

Teoria ed Implementazione



Marcello Minenna - Paolo Verzella  
Structured Products Italia 2006 – Milano, 10 Ottobre 2006